

## Chapitre 1 : Introduction au Calcul Inélastique des Structures

### 1.1 Introduction :

Il est communément admis que la plupart des structures conçues sur la base du principe déterministe (contraintes admissibles), ou celui du principe semi-probabiliste (les états limites) possèdent une réserve considérable de résistance au-delà de la limite élastique jusqu'à ce qu'elles atteignent leurs capacités ultimes. Cette marge est due essentiellement à la capacité des éléments structurels à se déformer sans perte majeure de résistance (ductilité). L'inconvénient majeur de l'utilisation d'une méthode élastique pour le calcul de telles structures avec des éléments ductiles est que la réserve de résistance au-delà de la limite élastique (marge de sécurité) n'est ni quantifiée ni utilisée explicitement.

Des tentatives pour exploiter rationnellement et quantifier cette réserve de résistance pour dépasser l'inconvénient de l'analyse élastique classique ont été faites dès 1914 [1]. Des progrès très importants ont été réalisés après les années 1930. Les théorèmes fondamentaux disponibles à la fin des années 1940 et au début des années 1950 [2-4] ont finalement fourni une base de la théorie de la plasticité.

Enfin, l'idée principale de l'analyse plastique, est fondée sur l'hypothèse implicite que la structure analysée est conçue pour des matériaux ductiles [5]. La plupart des matériaux de génie civil possèdent une certaine ductilité, cependant la nature ductile de l'acier fait de ce matériau l'un des plus parfaits et idéals pour l'analyse plastique.

À l'orée des années 1950, Horne, M. R. (1950) [1], Greenberg, H. J et Prager, W. (1952) [6] et Neal, B.G (1956) [7] ont participé à l'instauration des méthodes pour l'analyse plastique de structures, ces dernières sont basées principalement sur le principe des travaux virtuels et sont applicables aux éléments de structures ou structures simples. Plus tard Stuart .S et Moy.J (1981) [8] ont utilisé une méthode aisée et plus efficace pour l'analyse plastique de structures en portiques, elle est dite "pas à pas". C'est une méthode incrémentale basée sur l'approche des rotules plastiques facilitant la formulation en éléments finis et la réalisation des programmes numériques.

Contrairement aux programmes informatiques et logiciels de calcul élastique linéaire, qui sont disponibles, les programmes informatiques et les logiciels d'analyse plastique sont rares et ne sont pas aussi accessibles. Les premiers programmes datent des années 1970 et concernent les portiques simples tels que ceux développés par Wang (1963) [9], Jennings et Majid (1965) [10]

et Davies (1967) [11] et plus tard par Chen et Sohal (1995) [12] pour les structures en portiques de taille considérable.

## 1.2 Acier doux

### 1.3 Comment les structures se comportent sous un chargement variable

#### 1.3.1 Treillis isostatique soumis à la traction

#### 1.3.2 Treillis hyperstatique soumis à la traction

##### 1.3.2.1 Analyse du comportement jusqu'à la ruine

La figure 1.8 montre une ferme avec trois membres et une charge verticale appliquée  $W$ . Une analyse élastique de la structure sera maintenant effectuée. L'analyse est plutôt longue et les points importants qui en découlent sont résumés dans la section 1.3.2.2.

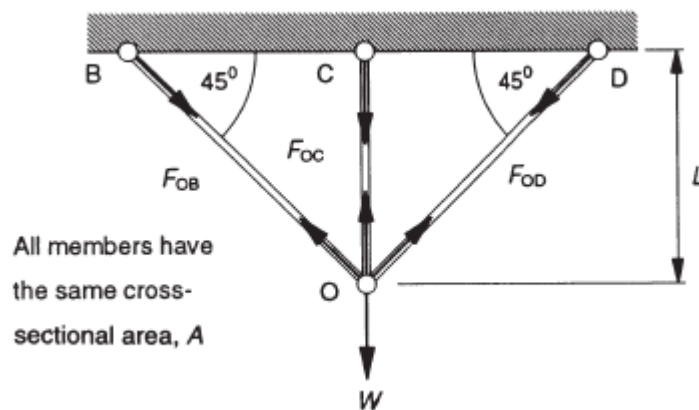


Figure 1.8

L'analyse est présentée dans son intégralité afin qu'elle puisse être comparée à l'analyse précédente du treillis isostatique.

Il y a trois forces membres inconnues, donc trois équations indépendantes sont nécessaires pour trouver ces forces. Un test simple pour la détermination du degré d'hyperstaticité de ce type de treillis a été effectué ; le test montre qu'il est une fois hyperstatique.

Il sera nécessaire de considérer à la fois l'équilibre et la compatibilité de des déformations pour trouver les inconnues.

Pour l'équilibre vertical à O, on a :

$$F_{OB} \sin 45^\circ + F_{OC} + F_{OD} \sin 45^\circ = W \quad (1.7)$$

Il est évident de la symétrie, de la structure et du chargement, que le point O doit se déplacer verticalement vers le bas et OB doit étirer de la même quantité que OD. Comme les membres sont identiques (en coupe transversale), cela doit impliquer que :

$$F_{OB} = F_{OD} \quad (1.8)$$

Les équations 1.7 et 1.8 ne peuvent pas être résolues pour trouver les forces des membres inconnus.

Considérons maintenant l'élément incliné représenté sur la figure 1.9a. Il s'étend à distance  $\delta$  quand il supporte une force de traction  $F_{OX}$ . Pour que le point O se déplace verticalement vers le bas à  $O''$  le membre (maintenant étendu à  $O'X$ ) doit tourner autour de X. Si l'allongement est petit par rapport à la longueur (l'allongement lorsque le membre s'écoule n'est que d'environ 0,1% de la longueur) l'angle  $\delta\theta$  est pratiquement insignifiant.

(si  $\theta$  est de  $45^\circ$ ,  $\delta\theta$  est d'environ  $4'$  au point d'écoulement). Dans le triangle  $OO'O''$  l'angle  $OO''O'$  est alors égal à  $\theta$  (voir figure 1.9b) et

$$\delta = \Delta \sin \theta \quad (1.9)$$

Si  $OX$  est élastique, contrainte / déformation est égal au module de Young de sorte que

$$\frac{F_{OX}}{A} \div \frac{\delta}{OX} = E$$

La substitution pour  $\delta$  et  $OX$  donne

$$F_{OX} = \frac{AE}{L} \Delta \sin^2 \theta \quad (1.9)$$

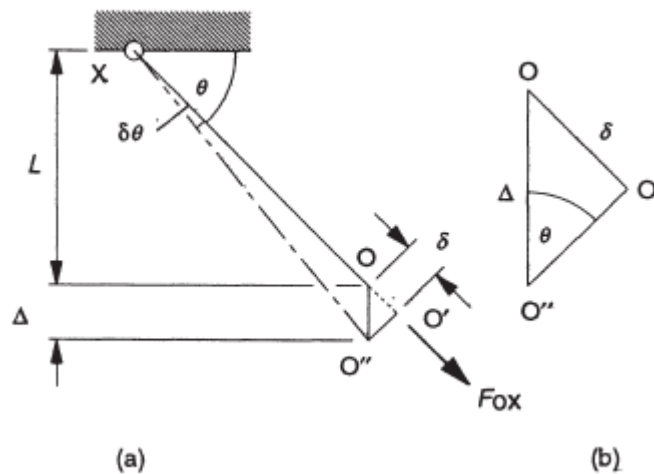


Figure 1.9

La compatibilité est assurée dans la ferme si le point O est contraint de se déplacer verticalement. Les équations 1.9 et 1.10 peuvent donc être utilisées pour les membres de la ferme :

$$\begin{aligned} \delta_{OB} = \delta_{OD} &= \Delta \sin 45^\circ = \frac{\Delta}{\sqrt{2}} \\ \delta_{OC} &= \Delta \sin 90^\circ = \Delta \end{aligned} \quad (1.11)$$

et

$$F_{OB} = F_{OD} = \frac{AE}{L} \Delta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{AE\Delta}{2L} \quad (1.12)$$

$$F_{OC} = \frac{AE\Delta}{L}$$

où  $\Delta$  est le déplacement vertical de 0. On peut voir d'après l'équation 1.12 que

$$2F_{OB} = F_{OC} \quad (1.13)$$

L'équation 1.13 et les équations 1.7 et 1.8 sont les équations nécessaires pour donner Les forces dans les membres. Substituer l'équation 1.8 dans l'équation 1.7 pour donner :

$$\sqrt{2}F_{OB} + F_{OC} = W \quad (1.14)$$

puis remplacer l'équation 1.13 par

$$\left( \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) F_{OC} = W \quad (1.15)$$

$$F_{OC} = 0.585W$$

$$F_{OB} = F_{OD} = 0.293W \quad (1.16)$$

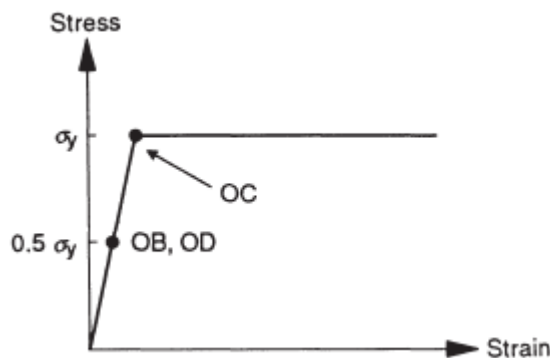


Figure 1.10

L'écoulement commence en OC lorsque la charge est augmentée à  $W_1$ , donnée par

$$\frac{0.585W_1}{A} = \sigma_y \quad (1.17)$$

$$W_1 = 1.709A\sigma_y$$

Les contraintes dans tous les membres sont montrées dans la figure 1.10. OB et OD sont poussées à  $0.5 \sigma_y$ . La flèche au niveau du point 0 lorsque l'écoulement commence est trouvée à partir de l'équation 1.12:

$$F_{OC} = A\sigma_y = \frac{AE\Delta_1}{L} \quad (1.18)$$

$$\Delta_1 = \frac{L\sigma_y}{E}$$

Jusqu'à ce stade, le présent exemple a été une version plus compliquée de l'exemple dans la section 1.3.1, mais à partir de maintenant il y a des différences importantes. Bien que OC ait écoulé, de sorte que la force est limitée à  $A\sigma_y$ , le point O ne peut pas se déplacer librement car il est retenu par les éléments élastiques restants.

Quand  $W$  est augmenté, il n'y a que deux forces inconnues dans les membres, donc l'écoulement de OC a provoqué une réduction (de un) du degré de redondance (l'hyperstatique et la redondance sont synonymes). L'équation 1.15 devient :

$$\sqrt{2} F_{OB} = W - A\sigma_y \quad (1.19)$$

Donc

$$F_{OB} = 0.707(W - A\sigma_y) \quad (1.20)$$

La solution est obtenue à partir de l'équation d'équilibre sans recours à les équations de compatibilité, parce que la poutre est devenue isostatique. OB et OD s'écoulent quand :

$$F_{OB} = A\sigma_y \quad (1.21)$$

En substituant l'équation 1.20 à l'équation 1.21, on obtient la charge  $W_2$  lorsque Celle-ci a lieu :

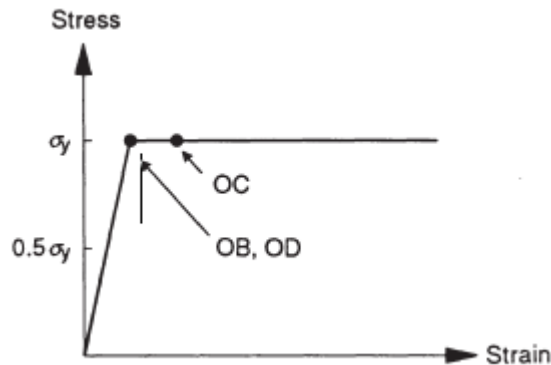


Figure 1.11

$$0.707(W_2 - A\sigma_y) = A\sigma_y \quad (1.22)$$

$$W_2 = 2.414A\sigma_y$$

Équation 1.12 (pour le membre OB, qui est resté élastique jusqu'à cette charge) donne la flèche correspondante  $\Delta_2$  du point O :

$$\Delta_2 = \frac{2L\sigma_y}{E} \quad (1.23)$$

Les contraintes de membre à  $W_2$  sont représentées sur la figure 1.11. Puisque tous les membres sont maintenant écoulés,  $W_2$  est la charge de ruine ( $W_c$ ) de la ferme. A l'instant où

$W_2$  est appliqué, appelé le point de ruine, la structure est dans un état neutre d'équilibre. Le point O pourrait être déplacé vers une nouvelle position avec un flux plastique se produisant dans tous les membres, et il resterait alors dans la nouvelle position.

### 1.3.2.2 Résumé des résultats de l'analyse

Les résultats de l'analyse de la section précédente sont résumés dans la figure 1.12 et les tableaux 1.1 et 1.2. Plusieurs points importants découlent de cette analyse :

- (1) Le degré d'hyperstatique (redondance) de la structure est réduit d'un (1) à chaque fois qu'un membre s'écoule. Cela a été constaté dans l'analyse lorsque le membre OC s'écoulait. Quand la ferme est devenue isostatique, un membre de plus qui atteint l'écoulement aurait causé une ruine (comme dans l'exemple de la section 1.3.1). Dans ce cas, deux membres ont écoulé simultanément à cause de la symétrie. Cette réduction de la redondance pourvoit un contrôle utile. A condition que le degré de redondance de la structure peut être trouvée, il est simple de déterminer le nombre minimum de membres écoulés requis lors de la ruine.
- (2) Redistribution des efforts internes. Le tableau 1.1 montre les valeurs relatives de la forces aux charges principales  $W_1$  et  $W_c$ . Il est clair que les grandeurs relatives se changent rapidement après que l'écoulement ait commencé dans un membre. Les membres les moins chargés, initialement, supportent progressivement une plus grande proportion de la charge appliquée. C'est ce qu'on appelle la redistribution des forces internes et est une caractéristique importante du comportement structurel.

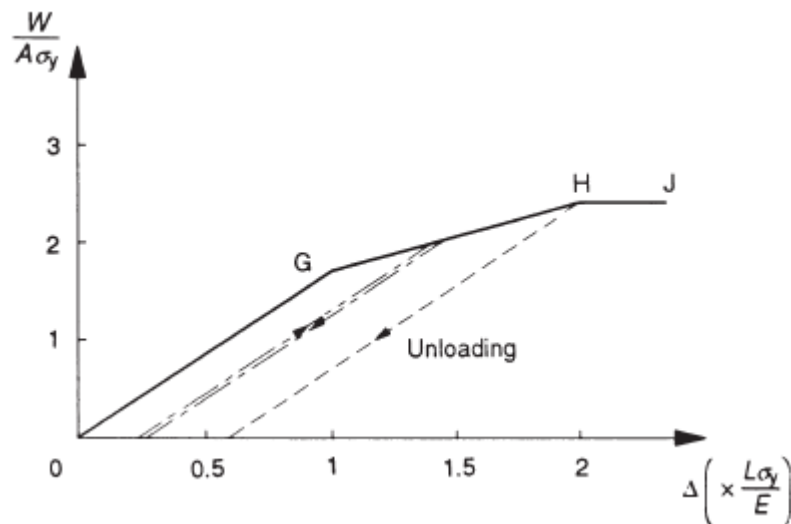


Figure 1.12

**Table 1.1** *Relative values of member forces.*

Load	$W_1$	$W_c$
$F_{OC}/F_{OC}$	1	1
$F_{OB}/F_{OC}$	0.5	1
$F_{OB} : F_{OC}$	1:2	1:1

- (3) Réduction de la rigidité. La figure 1.12 est un graphe de la charge appliquée  $W$  (tracé comme  $W / A\sigma_y$ ) contre la flèche  $\Delta$ . Le graphe est caractérisé par trois lignes droites qui s'approchent progressivement de l'horizontale. Ceci est confirmé par les valeurs numériques données dans le tableau 1.2. La pente (taux de variation de charge par rapport à la flèche,  $dW / d\Delta$ ) est une mesure de la rigidité de la structure. Initialement, la rigidité est plus grande, mais chaque fois qu'un membre s'écoule (et il y a une réduction du degré de redondance), il y a une baisse de rigidité. Dans la phase finale (HJ) lorsque tous les membres atteignent l'écoulement, la ligne est horizontale, ce qui indique une rigidité nulle. De ce fait, la définition de la ruine est lorsque la rigidité de la structure devient nulle !

**Table 1.2**

<i>Region of figure 1.12</i>	<i>Slope</i> $\frac{dW}{d\Delta} \left( \times \frac{AE}{L} \right)$
OG	1.707
GH	0.707
HJ	0

#### 1.4 Résumé

L'objectif de ce chapitre a été de présenter diverses idées et amener le lecteur à réfléchir au comportement des structures. Des exemples illustratifs ont été choisis avec soin pour cet objectif. En fait, l'analyse plastique n'est pas utilisée pour les fermes parce que dans une situation pratique, certains membres de la ferme seront en compression, et donc susceptible de flamber. L'analyse plastique a trouvé sa plus large application dans les structures qui portent la charge par flexion. Cependant, les idées qui ont été illustrées par les exemples de ce chapitre sont communes à toutes les structures, il est donc utile de les résumer avant de regarder de plus près les structures avec des éléments qui sont soumis à la flexion :

- (1) Le calcul de la charge de ruine n'est pas difficile. Les mathématiques sont plus simples que celui requis pour trouver la charge au premier écoulement.
- (2) La redondance de la structure est réduite lorsque ses membres s'écoulent. Un membre qui s'écoule provoque la perte d'un (1) degré de redondance. Au point de la ruine, la structure est isostatique.
- (3) Il y a une réduction de la rigidité lorsque les membres s'écoulent. À la ruine, la raideur est réduite à zéro.
- (4) Le point de la ruine est un état d'équilibre neutre.
- (5) Il y'a redistribution des forces internes lorsque les membres s'écoulent.